Exercices -Séries numériques

A. Ramadane, Ph.D.

Exercice

Déterminez si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(2n)}{n^2+1}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{n\pi} \frac{(n+1)!}{n!} \sin(x)\, dx\right]$, c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n^{-\frac{1}{2}}\left(n^{\frac{1}{2}}-2\right)}$.

a) Par le test de comparaison, nous avons:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(2n)}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Comme nous avons une série à termes positifs et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $p = 2$), alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(2n)}{n^2+1}$ converge également.

b) Nous avons

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^{n\pi}\frac{(n+1)!}{n!}\sin(x)\,dx\right] &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\cos(x)\right]_0^{n\pi} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left[\cos(n\pi)-\cos(0)\right] \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left[(-1)^n-1\right] \\
&= -\left[1\times(0)+2\times(-2)+3\times(0)+4\times(-2)\cdots\right]=\infty
\end{aligned}
$$

Donc la série diverge.

c) Par le test de la divergence, nous avons:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{-\frac{1}{2}}\left(n^{\frac{1}{2}}-2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1-2\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = 2 \neq 0$$

Comme la limite du terme général de la série est différent de 0, alors la série diverge.

Exercice

Soit S_n, la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+9k+20}$.

a) Trouvez S_n et simplifiez son expression autant que possible.

Indice Utiliser les notions de décomposition en fractions partielles et de série télescopique.

b) Que vaut S, la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+9k+20}$?

c) Est-ce que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2+9k+20}\right)$ converge ?

<u>Solution</u>

a) En posant

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^2+9k+20} &= \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{A}{k+4} + \frac{B}{k+5} \qquad \Rightarrow A = 1, B = -1. \\
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+9k+20} &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{k+4} + \frac{-1}{k+5} \right] \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+5)}
\end{aligned}
$$

$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+5)}$.

b) $S = \frac{1}{4}$.

a) En posant

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2+9k+20} &= \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{A}{k+4} + \frac{B}{k+5} \qquad \Rightarrow A = 1, B = -1. \\
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+9k+20} &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{k+4} + \frac{-1}{k+5} \right] \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+5)}
\end{aligned}$$

$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+5)}$.

b) $S = \frac{1}{4}$.

c) Oui. La série est absolument converge donc convergence par le test de comparaison en utilisant la relation $\sin(x) \leq x, \forall x \geq 0$.

Question

Pour quelles valeurs de p est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ converge?

Solution

- Si $p \leq 0$, par le test de divergence, nous avons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \quad \text{n'existe pas. Donc la série diverge.}$$

- Si $p > 1$, examinons la série en valeur absolue.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \text{(série de Riemann } p > 1\text{)}$$

La série est absolument convergente donc convergente.

- Si $0 < p \leq 1$, utilisons le test de Leibniz (test d'une série alternée) avec $b_n = \frac{1}{n^p}$.

1) Puisque $n \geq 1$, alors $b_n = \dfrac{1}{n^p} > 0, \forall p \in]0, 1]$

2) Vérifions si $b_{n+1} \leq b_n$.

$$\begin{aligned} (n+1)^p &> n^p \\ \underbrace{\frac{1}{(n+1)^p}}_{b_{n+1}} &< \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{b_n} \\ \Rightarrow b_{n+1} &< b_n. \end{aligned}$$

Donc suite décroissante

3) Vérifions si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Puisque les 3 conditions sont vérifiées, alors la série converge si $0 < p \leq 1$.

Conclusion: La série converge pour $0 < p < \infty$ et diverge sinon.

Déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent :

a) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+6}{2^n}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\sin(n)$$